PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

NOCIONES PREVIAS

1. GRÁFICA DE RELACIONES DEFINIDAS POR INECUACIONES LINEALES

Ejemplo:

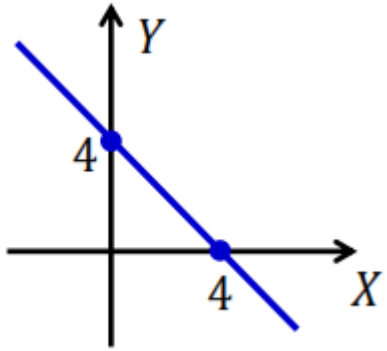
Grafique $x + y \leq 4$

Resolución:

(1) Graficamos la línea recta $x + y = 4$

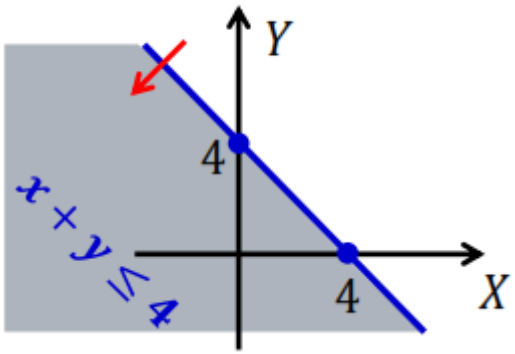
$x + y = 4$

x	y
0	4
4	0



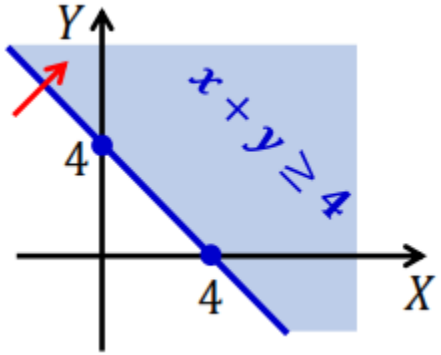
(2) Elegimos la región que satisface la inecuación

$x + y \leq 4$

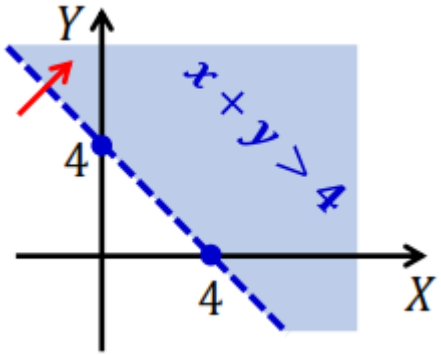


También, tenga en cuenta que:

- $x + y \geq 4$



- $x + y > 4$



2. GRÁFICA DE RELACIONES DEFINIDAS POR UN SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES.

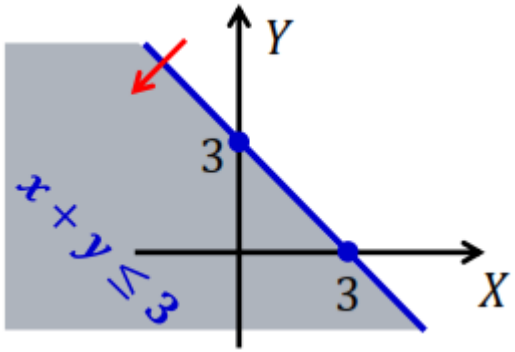
Ejemplo:

Grafique $\begin{cases} x + y \leq 3 \\ 2x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0; \ \ y \geq 0 \end{cases}$

Resolución:

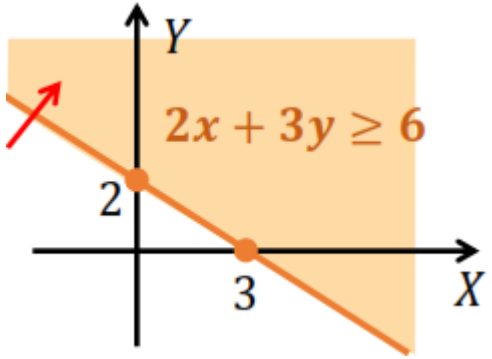
$x + y = 3$

x	y
0	3
3	0

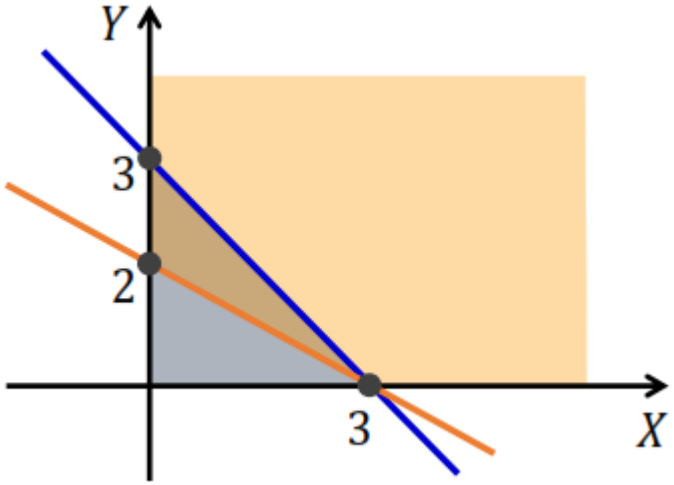


$2x + 3y = 6$

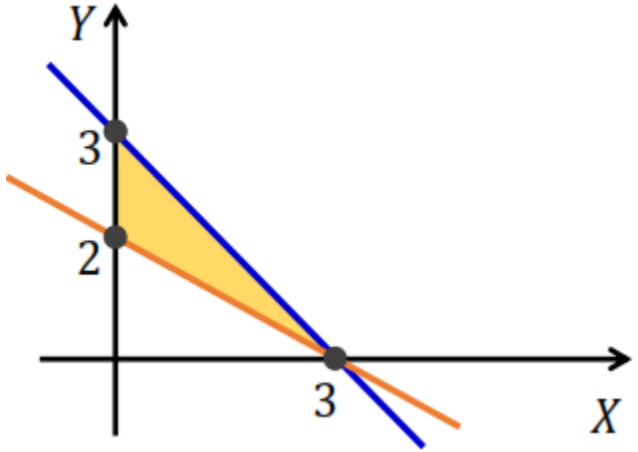
x	y
0	2
3	0

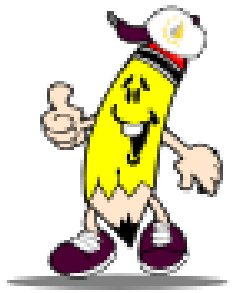


Intersecamos las gráficas considerando la condición de $x \geq 0$, $y \geq 0$ (primer cuadrante)



Luego





PROGRAMACIÓN LINEAL

Un problema de programación lineal tiene como finalidad el minimizar o maximizar una función lineal

Estructura de un problema de PL:

máx. (mín.) $f(x;y) = ax + by$

Función objetivo

Sujeto a (s.a.):

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \geq c_2 \\ \vdots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \\ \boxed{x \geq 0;\ y \geq 0} \ldots (*) \end{cases}$$

Conjunto de restricciones

$(*)$ condición de no negatividad

Observación:

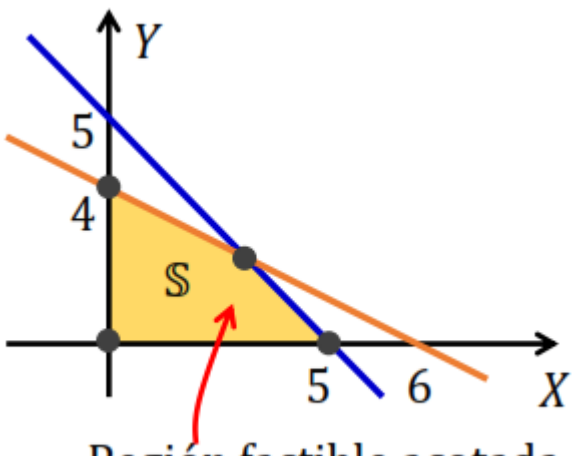
La gráfica del conjunto de restricciones es llamada región factible y esta puede ser acotada o no acotada.

Ejemplos:

máx. $f(x;y) = 2x + 4y$

Sujeto a:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

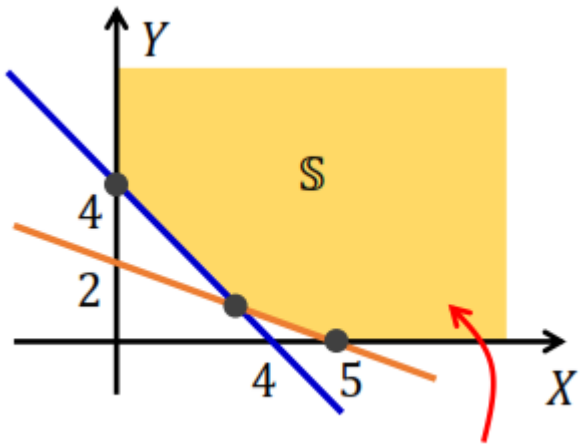


Región factible acotada

mín. $f(x;y) = 5x + 3y$

Sujeto a:

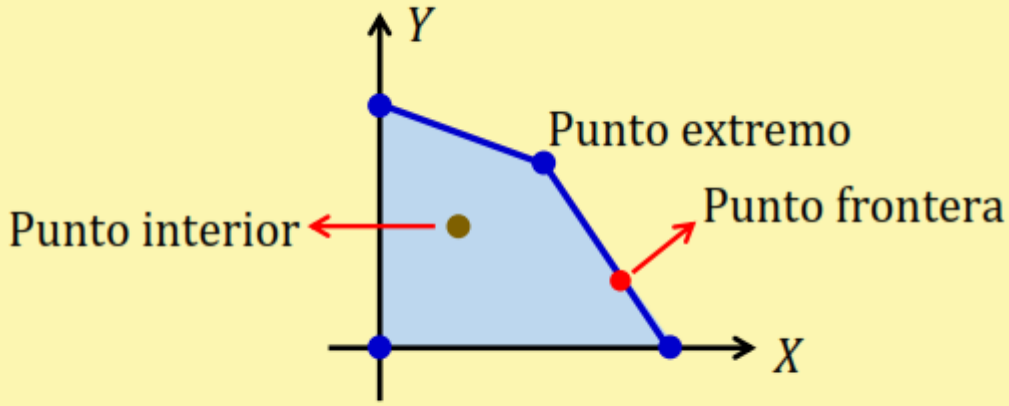
$$\begin{cases} x + y \geq 4 \\ 2x + 5y \geq 10 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$



Región factible no acotada

PROGRAMACION LINEAL

Observación:



Un punto extremo (vértice) también es punto frontera.

Definiciones:

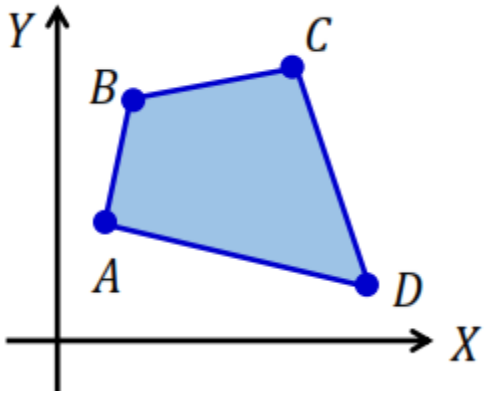
- **Punto factible** (punto adherente): Es todo punto que pertenece a la región factible.
- **Solución óptima:** Es aquel punto perteneciente a la región factible que maximiza o minimiza a la función objetivo.
- **Valor óptimo:** Es el máximo o mínimo valor que adquiere la función objetivo .

Teorema fundamental de la programación lineal

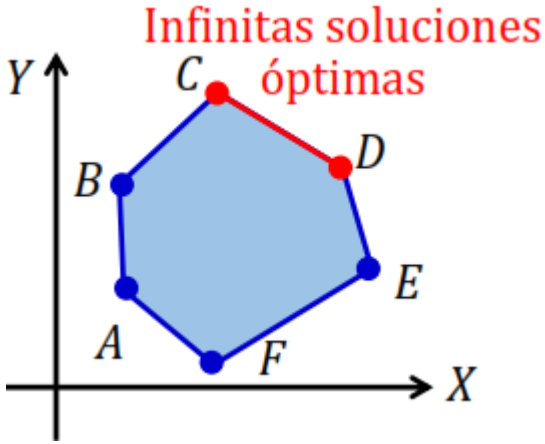
Si un problema de **Programación Lineal** tiene región factible no vacía, entonces, si existe el óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo, esta se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible.

Corolario

Si el óptimo de la función objetivo ocurre en dos puntos extremos, entonces se tiene el mismo valor en el segmento que une dichos puntos.



máx. o mín. de $f(x;y)$ ocurre en A, B, C o D



Si $f(C) = f(D) = \text{máx } f$

$\rightarrow \text{máx } f = f(P);\ \forall\, P \in \overline{DC}$

PROGRAMACION LINEAL

Ejemplos:

Resuelva máx. $f(x;y) = 3x + 4y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} x + y \leq 15 \\ 2x + 3y \leq 36 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución:

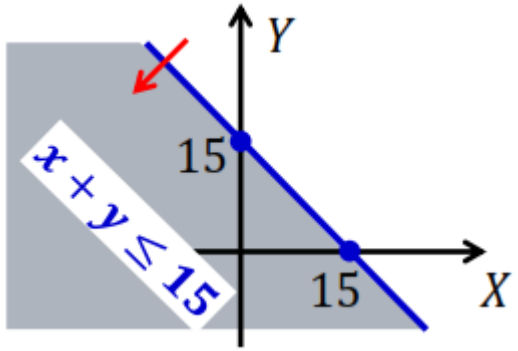
1) Grafique la región factible y halle las coordenadas de los puntos extremos.

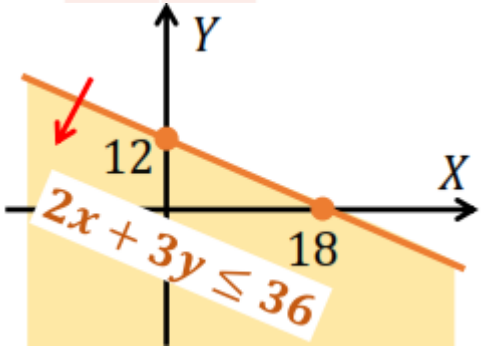
$x + y = 15$

x	y
0	15
15	0

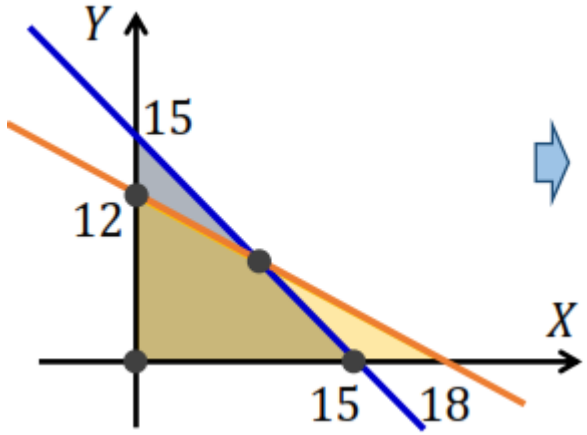
$2x + 3y = 36$

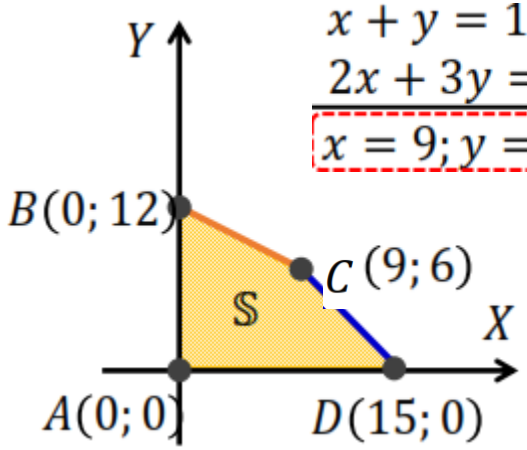
x	y
0	12
18	0





Intersecamos las regiones anteriores, considerando la condición de $x \geq 0,\ y \geq 0$ (I C)





$x + y = 15$
$2x + 3y = 36$
$\boxed{x = 9; y = 6}$

2) Evaluamos cada uno de los vértices en la función objetivo. $f(x;y) = 3x + 4y$

$$f(A) = f(0;0) = 3(0) + 4(0) = 0$$
$$f(B) = f(0;12) = 3(0) + 4(12) = 48$$

$$f(C) = f(9;6) = 3(9) + 4(6) = 51 \leftarrow \text{máx.}$$
$$f(D) = f(15;0) = 3(15) + 4(0) = 45$$

$$\therefore \text{máx. } f(x;y) = f(\underbrace{9;6}_{\text{solución óptima}}) = \mathbf{51}$$

RECTAS DE NIVEL

Las rectas de nivel de la función objetivo

$$z = ax + by$$

se obtiene asignándole cualquier real a z.

$$k = ax + by \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{k}{b};\ k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

Determine las rectas de nivel que genera la función $f_{(x;y)} = 4x + 3y$

Resolución: $k = 4x + 3y$

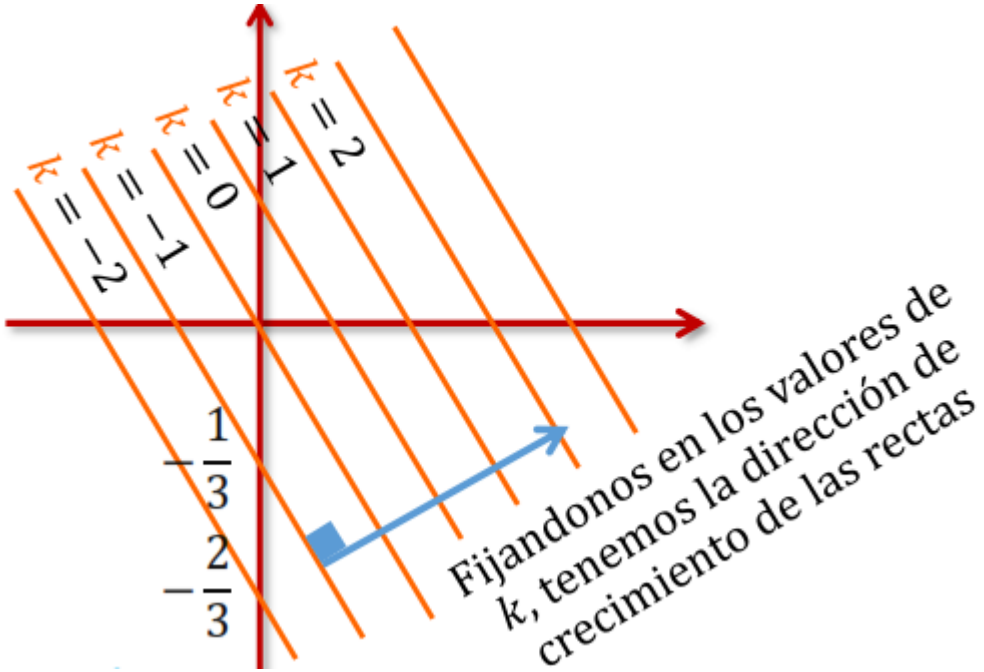
$k = -2$ $\quad -2 = 4x + 3y \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

$k = -1$ $\quad -1 = 4x + 3y \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$

$k = 0$ $\quad 0 = 4x + 3y \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x$

$k = 1$ $\quad 1 = 4x + 3y \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$

$k = 2$ $\quad 2 = 4x + 3y \quad \leftrightarrow \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$



Observación:

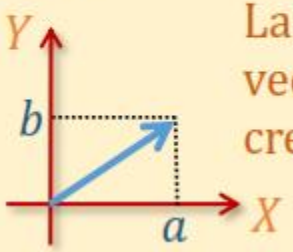
Las rectas de nivel, son rectas paralelas, por lo tanto será suficiente graficar una de ellas y las otras serán paralelas a la primera

VECTOR DIRECCIÓN

Este vector ($\bar{V}$) nos indica la dirección en que aumenta $z = ax + by$,

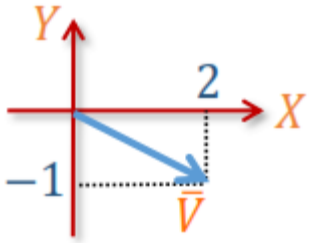
$\bar{V} = (a; b)$

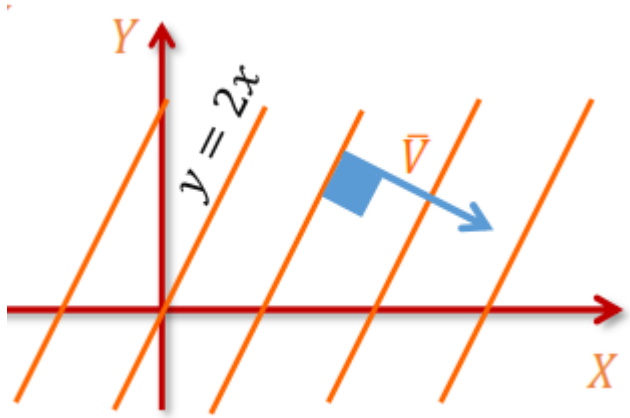
Considerando a y b positivos



La pendiente del vector dirección de crecimiento es b/a

Vector dirección de crecimiento: $\bar{V} = (2; -1)$





Ejemplo:

Determine las rectas de nivel y su vector dirección de crecimiento, que genera la función $f(x; y) = 2x - y$

Resolución:

Es suficiente dibujar una recta de nivel:

$k = 2x - y \qquad k = 0: \quad 0 = 2x - y$

$\leftrightarrow \quad y = 2x$ las otras son paralelas

Observación:

Sea la función objetivo: $z = ax + by$

- Pendiente de las rectas de nivel: $m_{\mathcal{L}} = -a/b$
- Pendiente del vector dirección de crecimiento: $m_{\bar{V}} = b/a$

$$m_{\mathcal{L}} \times m_{\bar{V}} = (-a/b)(b/a) = -1$$

son perpendiculares

MOMENTO DE PRACTICAR

VAMOS SI SE PUEDE !!!

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

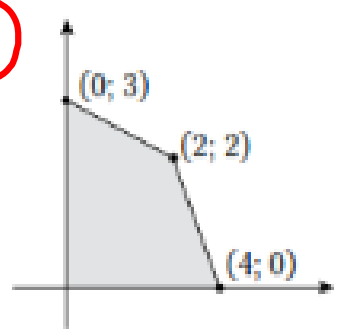
PROGRAMACION LINEAL

1. Resuelva el sistema de inecuaciones lineales

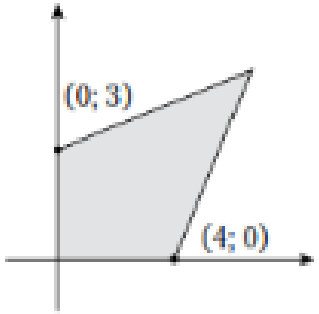
$$\begin{cases} 2y + x \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0 \end{cases}$$

luego indique la región que forma su C.S.

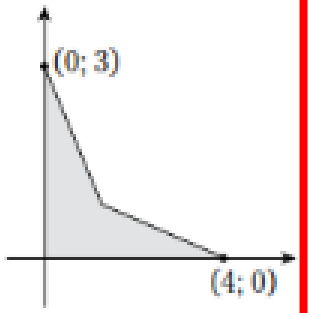
A)



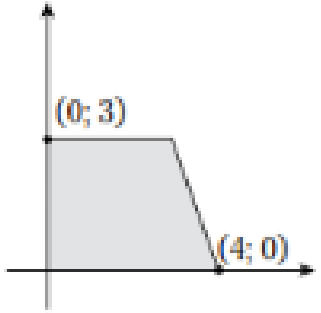
C)



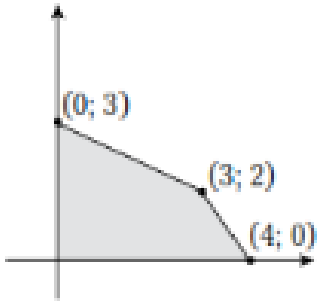
E)



B)



D)



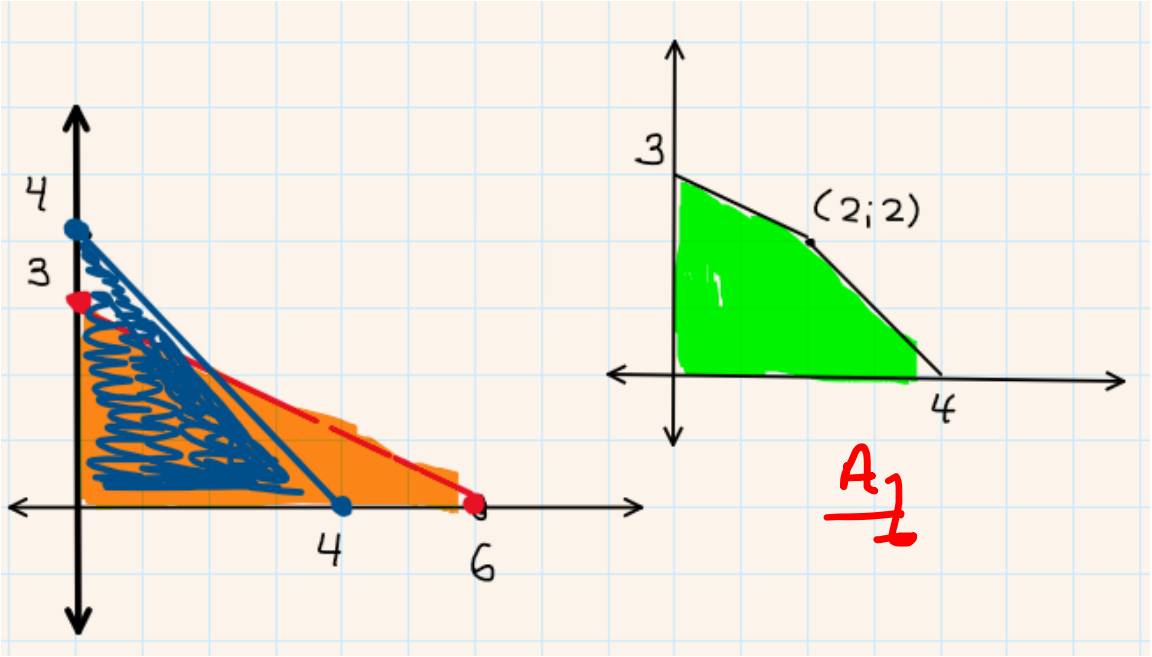
SOLUCIÓN

$2y + x = 6$		$x + y = 4$	
3	0	0	4
0	6	4	0

$x + 2y = 6$

$x + y = 4$

$y = 2; \ x = 2$

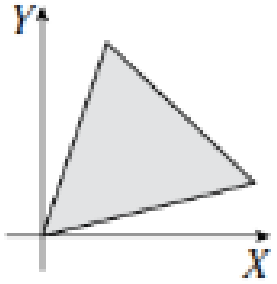


2. Determine la región factible del siguiente problema de programación lineal.

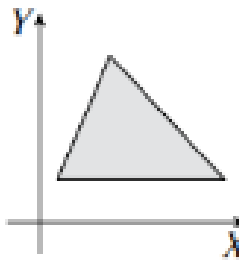
Mín. $f_{(x;y)} = 7x + y$ sujeto a las restricciones.

$$\begin{cases} y - 4x \leq 0 \\ y + x \geq 10 \\ 4y \geq x \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

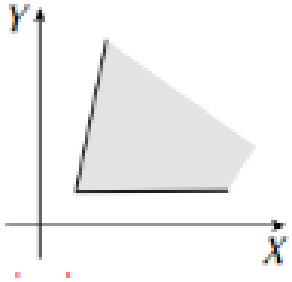
A)



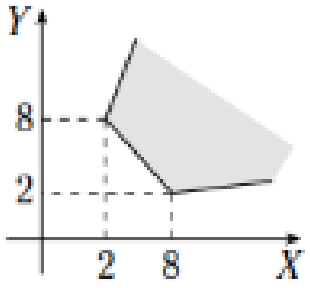
C)



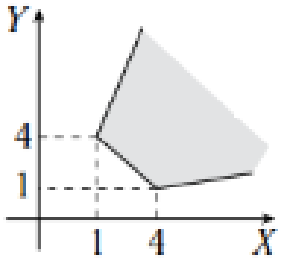
E)



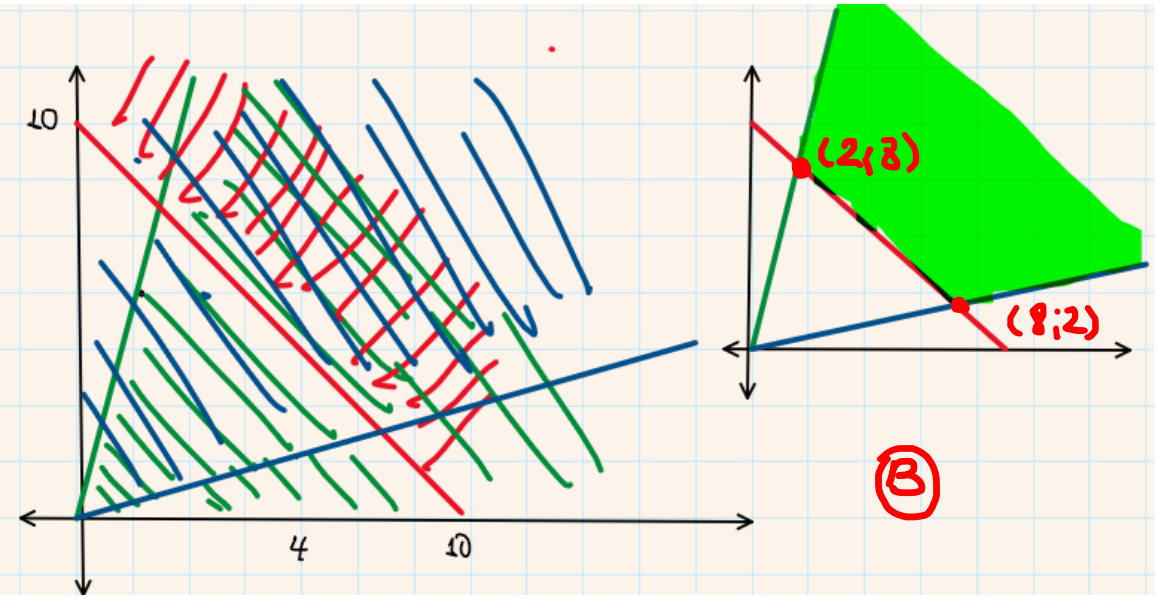
B)



D)



SOLUCIÓN

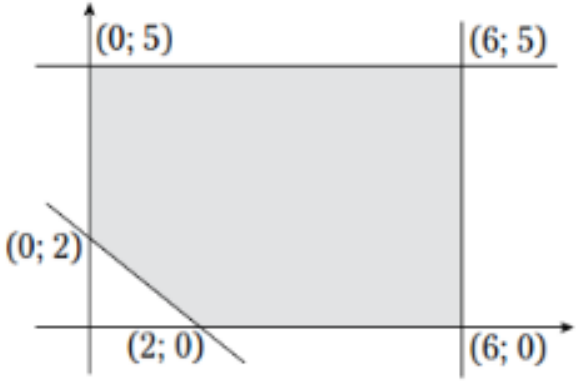


$y = 4x$

$x + y = 10$

$y = \frac{1}{4}x$

3. Determine el sistema de inecuaciones lineales que presenta la siguiente región sombreada admisible de un programa lineal.



A) $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 6 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

B) $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 5 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

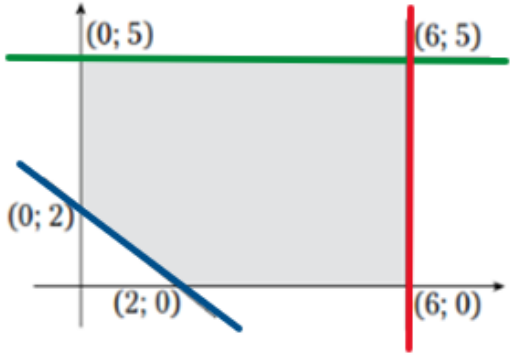
C) $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 5 \\ x + y \le 2 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

D) $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 5 \\ x + y \ge 4 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x \le 5 \\ y \le 6 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

SOLUCIÓN

3. Determine el sistema de inecuaciones lineales que presenta la siguiente región sombreada admisible de un programa lineal.



A) $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 6 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

~~B)~~ $\begin{cases} x \le 6 \\ y \le 5 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{cases}$

$y \le 5$

$x \le 6$

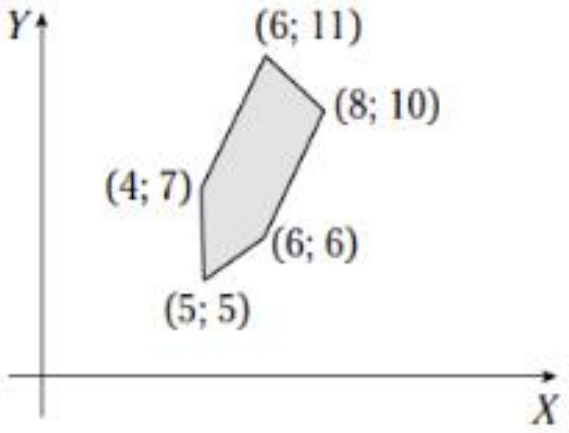
$x + y \ge 2$

$x \ge 0 \wedge y \ge 0$

$\rightarrow \begin{cases} x \le 6 \\ y \le 5 \\ x + y \ge 2 \\ x \ge 0 \wedge y \ge 0 \end{cases}$

B

4. Se da la función $f_{(x;y)} = 6x - 3y$ sujeta a la región factible

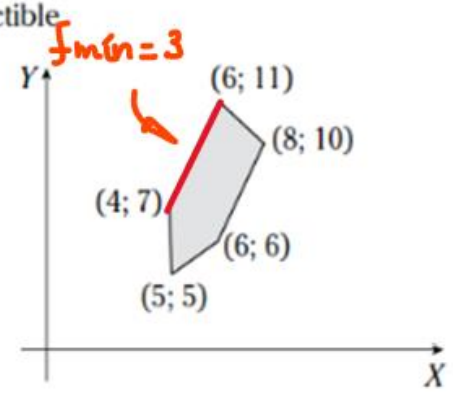


Respecto de la función objetivo Mín. $f_{(x;y)}$ podemos afirmar que

A) tiene una solución.
B) no tiene solución.
C) tiene infinitas soluciones.
D) el valor óptimo es 15.
E) (5; 5) es el punto óptimo.

SOLUCIÓN

4. Se da la función $f_{(x;y)} = 6x - 3y$ sujeta a la región factible



Respecto de la función objetivo Mín. $f_{(x;y)}$ podemos afirmar que

A) tiene una solución.
B) no tiene solución.
C) tiene infinitas soluciones.
D) el valor óptimo es 15.
E) (5; 5) es el punto óptimo.

$f(x;y) = 6x - 3y \rightarrow \text{mín} f(x;y) = ??$

$f(4;7) = 6(4) - 3(7) = 3$ ✓

$f(5;5) = 6(5) - 3(5) = 15$

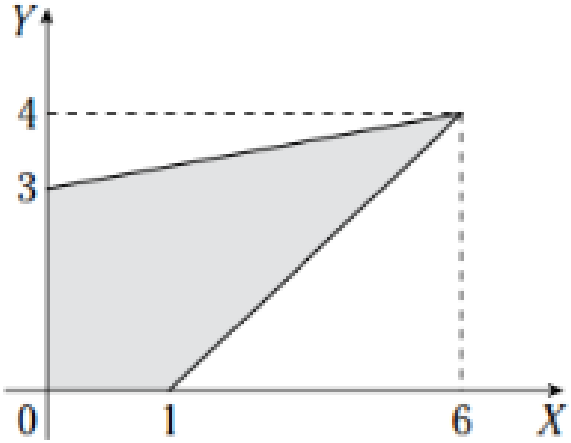
$f(6;6) = 6(6) - 3(6) = 18$

$f(8;10) = 6(8) - 3(10) = 18$

$f(6;11) = 6(6) - 3(11) = 3$ ✓

A) F B) F C) V D) F E) F

5. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por $f_{(x;y)} = -3x+y$. Determine el punto de la región convexa mostrada en la figura, donde f alcanza su mínimo.

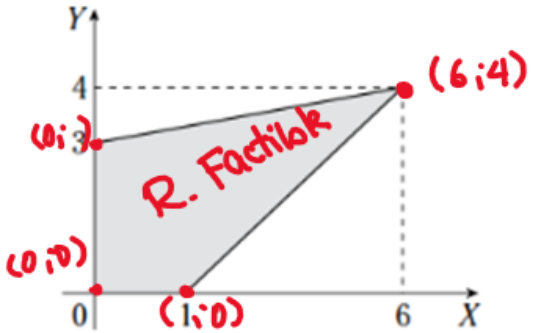


A) (2; 3) B) (2; 0) C) (0; 3)
D) (6; 4) E) (4; 6)

UNI 2008-II

SOLUCIÓN

5. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida por $f_{(x;y)} = -3x+y$. Determine el punto de la región convexa mostrada en la figura, donde f alcanza su mínimo.



A) (2; 3) B) (2; 0) C) (0; 3)
~~D)~~ (6; 4) E) (4; 6)

UNI 2008-II

$f(x;y) = -3x+y$

$f(0;0) = 0$

$f(1;0) = -3$

$f(6;4) = -14$ (mín)

$f(0;3) = 3$

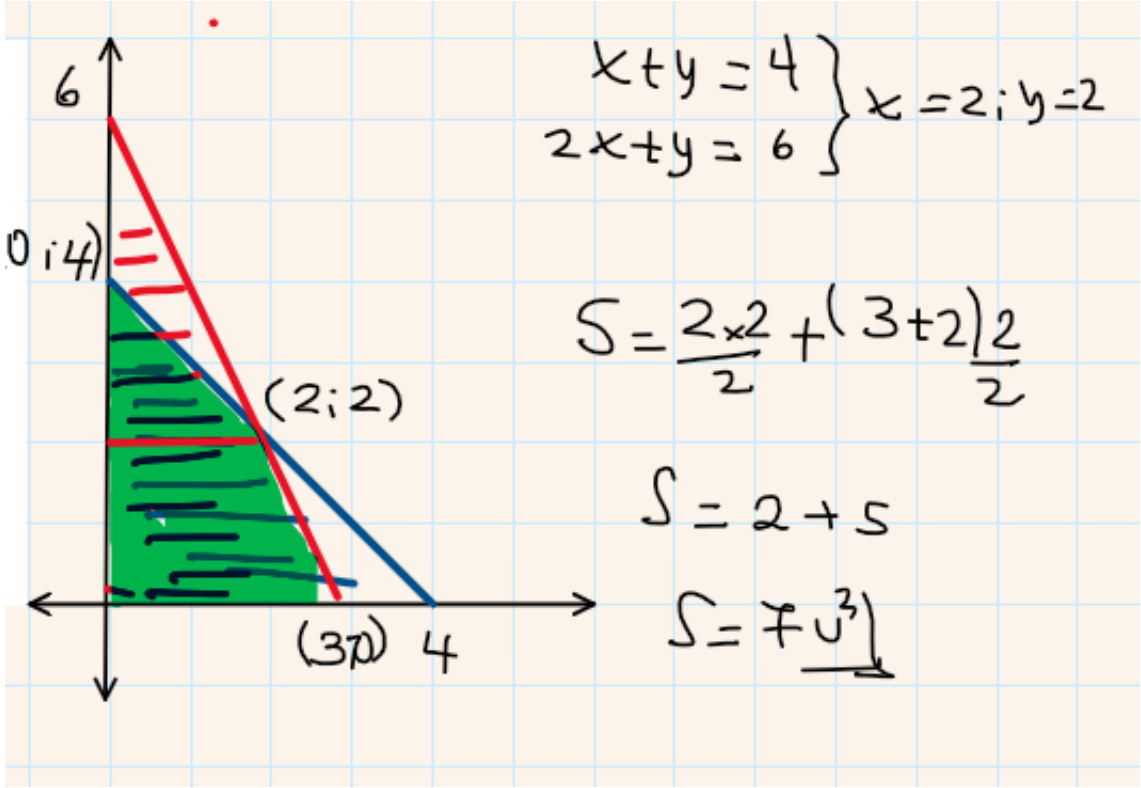
$f_{mín} = 14$ y el óptimo es $(6;4)$ D

6. Calcule el área de la región que se forma al determinar todos los $(x; y)$ que cumplen las siguientes restricciones.

$$\begin{cases} x+y \leq 4 \\ 2x+y \leq 6 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

A) $4\ u^2$ B) $5\ u^2$ C) $6\ u^2$
D) $7\ u^2$ E) $8\ u^2$

SOLUCIÓN



7. Halle los puntos extremos del siguiente problema Máx. $f_{(x;y)}=x+y$ sujeto a

$$\begin{cases} 3y \le -4x+41 \\ y \le -x+12 \\ x \ge 2;\ y \ge 3 \end{cases}$$

A) (2; 3), (2; 10), (6; 7), (8; 3)
B) (2; 3), (5; 7), (8; 3)
C) (3; 2), (10; 2), (7; 5), (3; 8)
D) (2; 3), (2; 10), (5; 7), (8; 3)
E) (1; 3), (1; 10), (5; 7), (8; 3)

SOLUCIÓN

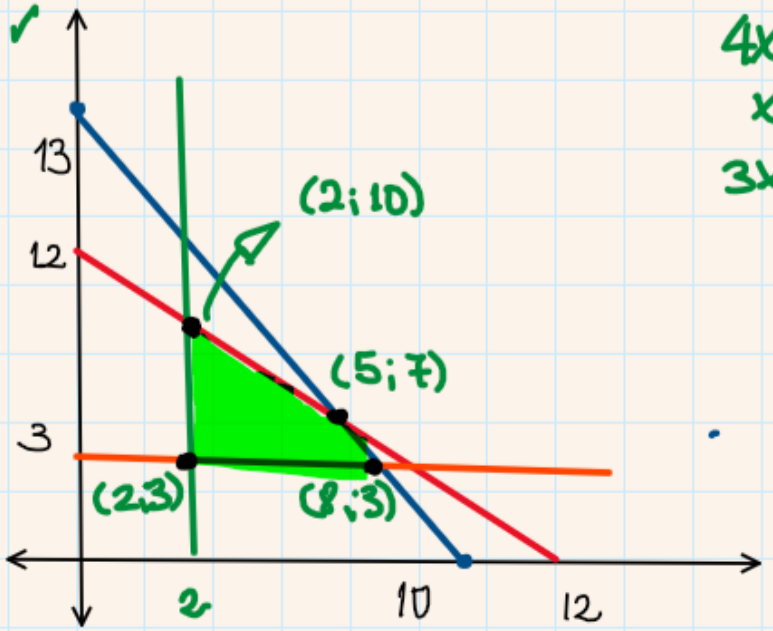
- $4x+3y \le 41$ ✓

$x=0;\ y=\frac{41}{3}$

$x=\frac{41}{4}\quad y=0$

- $x+y \le 12$

- $x \ge 2 \wedge y \ge 3$



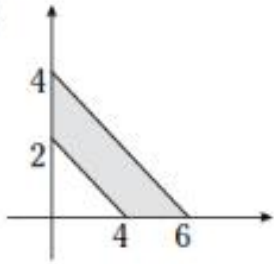
$4x+3y=41$
$x+y=12$
$3x+3y=36$
$x=5;\ y=7$

$\therefore$ (2;3); (2;10); (5;7); (8;3) D

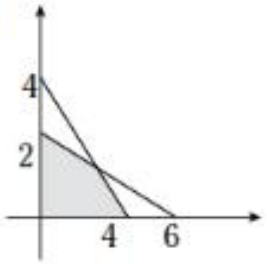
8. Identifique la gráfica de las restricciones

$$\begin{cases} x+3y \geq 6 \\ x+y \geq 4 \\ y \leq \frac{-2}{5}x+4 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$

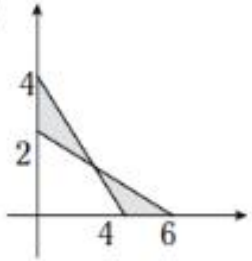
A)



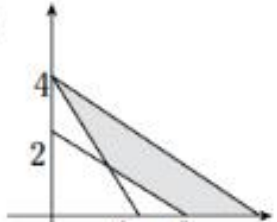
B)



C)

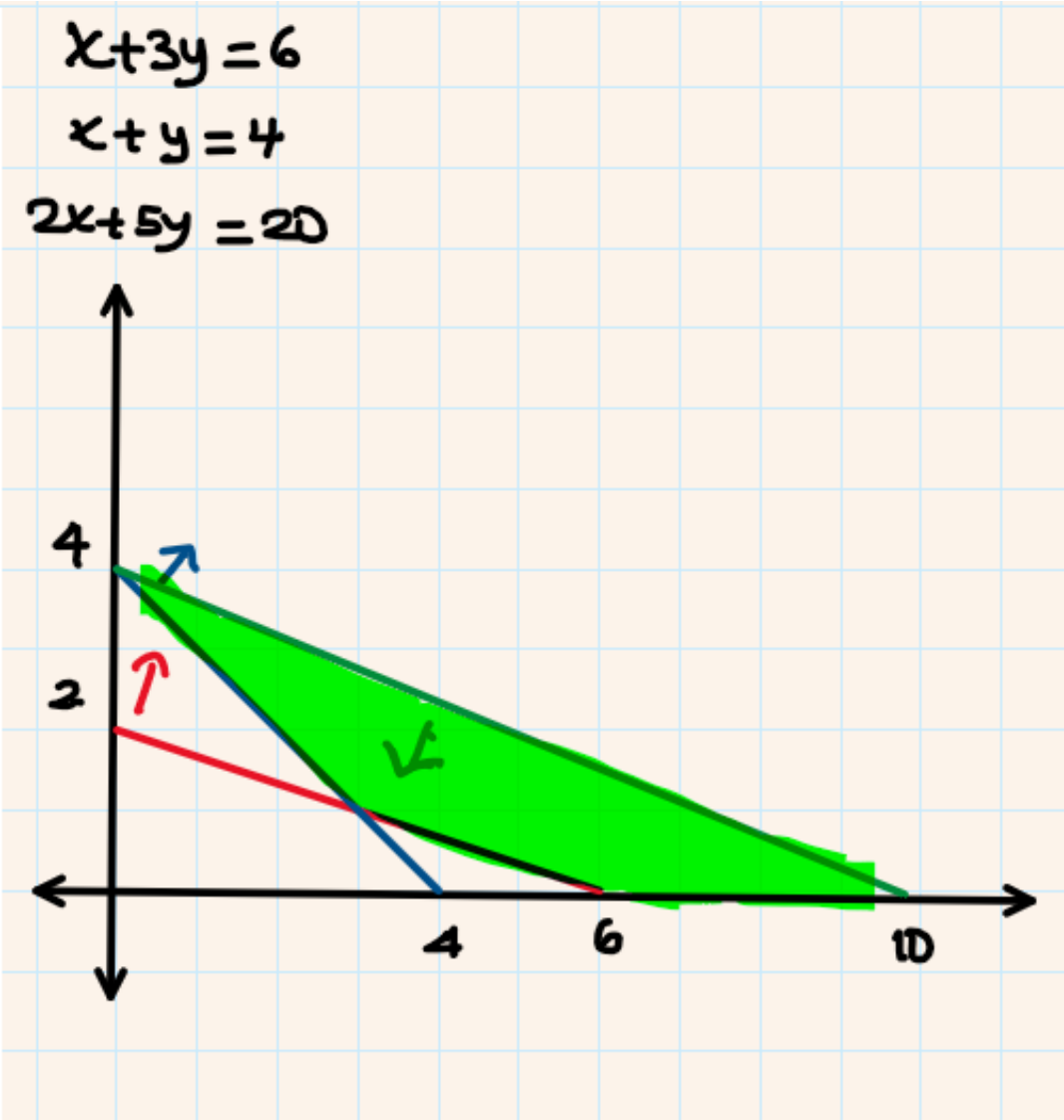


D)



E)

SOLUCIÓN



9. Resuelva el sistema en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} y+2x\le 6 \\ 2y+x\le 6 \\ x\ge 0 \ \wedge \ y\ge 0 \end{cases}$$

Luego indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. El cardinal del CS es 11.

II. La mayor suma de $x+y$ ocurre en el punto más alejado del eje X y del eje Y.

III. Si $x>0 \ \wedge \ y>0$, entonces el cardinal de CS es 4.

A) VVV
B) VVF
C) FVV
D) VFV
E) FFF

SOLUCIÓN

$2x+y\le 6$

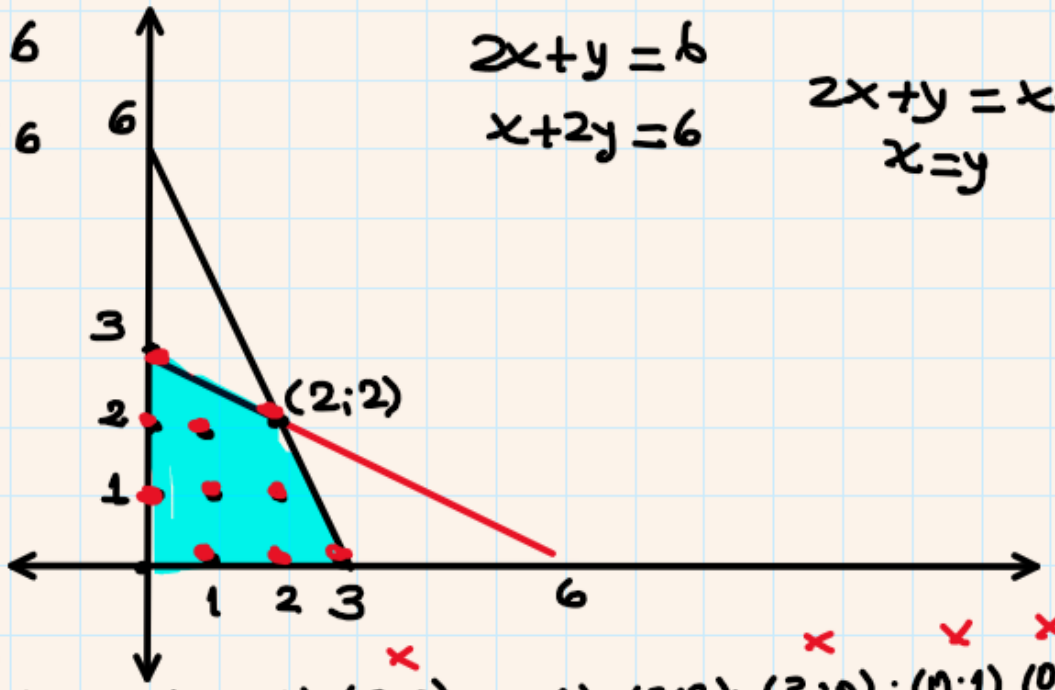
$x+2y\le 6$

$2x+y=6$

$x+2y=6$

$2x+y=x+2y$

$x=y$



$CS=\{(0;0);(1;1);(1;2);(2;0);(2;1),(2;2);(3;0);(0;1),(0;2);(0;3)$
$(4;0)\}$

$(x+y)_{máx}=4$

10. Se da el siguiente conjunto de restricciones de un problema de programación lineal en dos variables

$$\begin{cases} y \geq x+4 \\ y \leq -x+8 \\ 0 \leq x \leq 6;\ y \geq 0 \end{cases}$$

Indique cuáles son las proposiciones falsas.

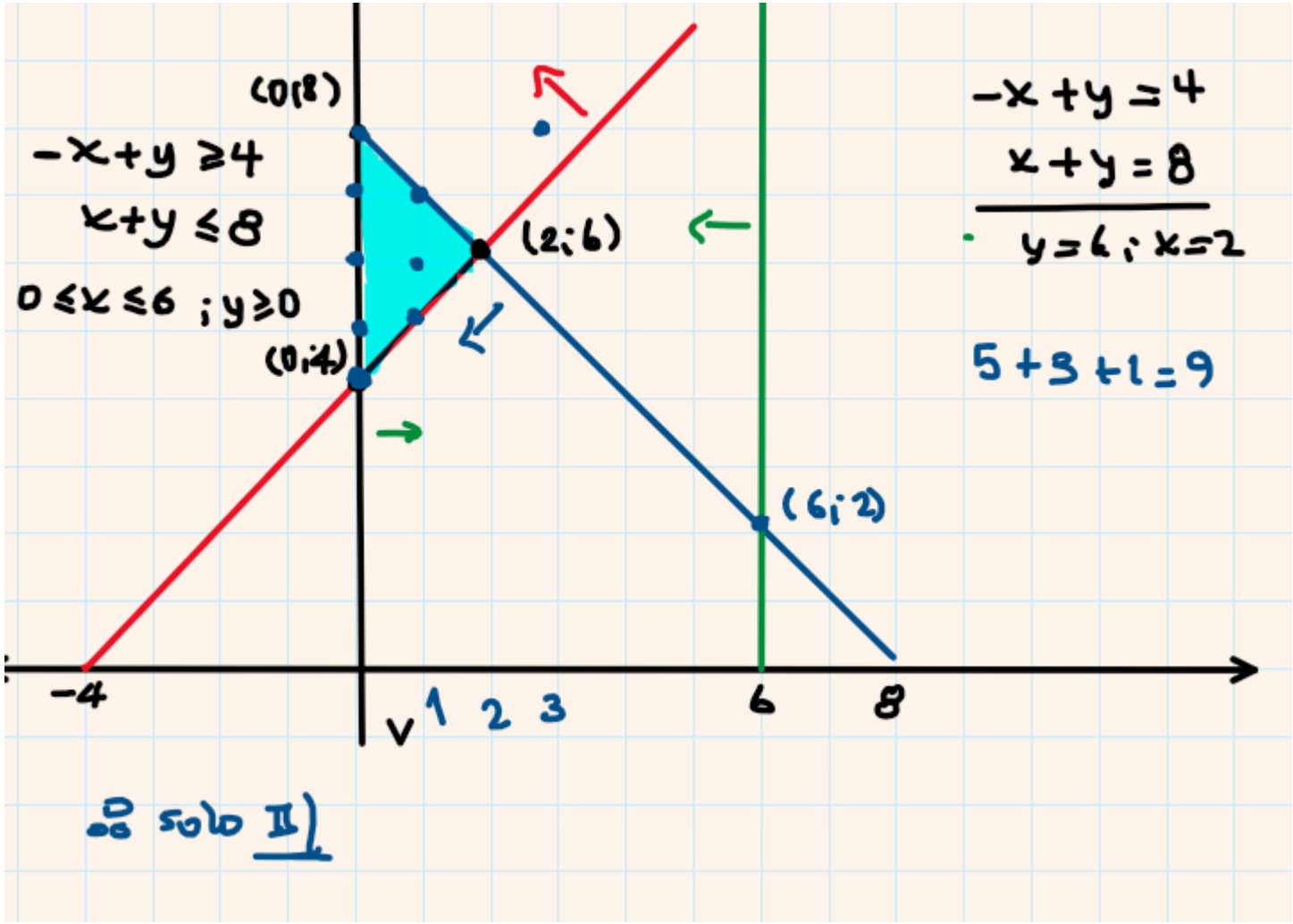
I. Existen 10 puntos factibles de componentes enteros.

II. (6; 2) no es punto factible.

III. (3; 8) es un punto factible.

A) solo I
B) solo II
C) I y II
D) II y III
E) todas

SOLUCIÓN



11. Una empresa con sede en Lima fabrica diversos modelos de radiotransistores. Todos los componentes de estos radios se fabrican en Lima, excepto los transistores que son importantes. Existen 1000 transistores del tipo T_1 y 1200 del tipo T_2. Cada modelo de radio $R-A$ requiere un transistor T_1 y 4 transistores T_2; los modelos $R-B$ requieren 2 transistores de T_1 y uno de T_2. Si se sabe que los beneficios o utilidades de cada radio son 50 y 30 dólares por $R-A$ y $R-B$, respectivamente, halle la cantidad de unidades a fabricar de cada modelo para que las utilidades totales sean máximas.

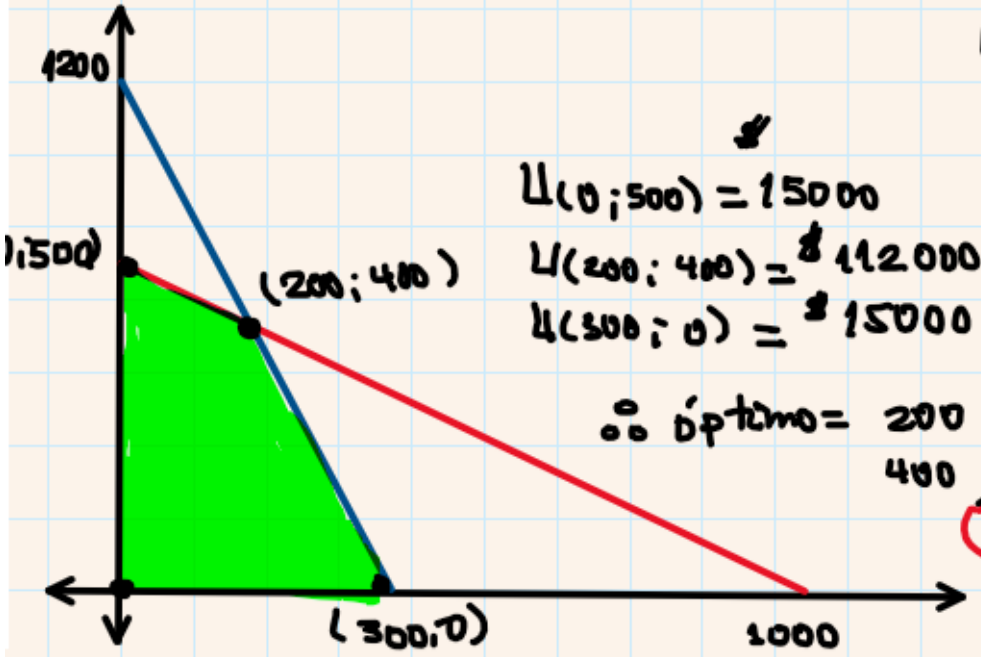
A) 200A y 400B
B) 100A y 500B
C) 500A y 400B
D) 200A y 300B
E) 300A y 400B

SOLUCIÓN

		T_1	T_2	U
x	R–A	1	4	$ 50
y	R–B	2	1	$ 30
		1000	1200	

$U(x;y) = 50x + 30y$

$$\begin{cases} x + 2y \leq 1000 \\ 4x + y \leq 1200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$



$U(0;500) = 15000$

$U(200;400) = \$112000$ (máx)

$U(300;0) = \$15000$

$\therefore$ óptimo = 200 R–A
400 R–B

A

$x + 2y = 1000$
$4x + y = 1200$
$8x + 2y = 2400$

$7x = 1400$
$x = 200;\ y = 400$

12. Wilson Cachay se dedica a la compra y venta de papaya y naranja. Todas las mañanas visita a su proveedor de frutas en el mercado mayorista Túpac Amaru II y hace las compras del día. El día anterior recibe los pedidos de sus clientes y estos suman 600 kilos de papaya y 1200 kilos de naranja. Wilson transporta las frutas en su camioneta que tiene capacidad de cargo de 1600 kg. Si compra el kg de papaya a S/.1,30 y lo vende a S/.1,60 y el kg de naranja lo compra a S/.1,00 y lo vende a S/.1,20, determine cuántos kilos de cada fruta debe comprar para maximizar sus ganancias.

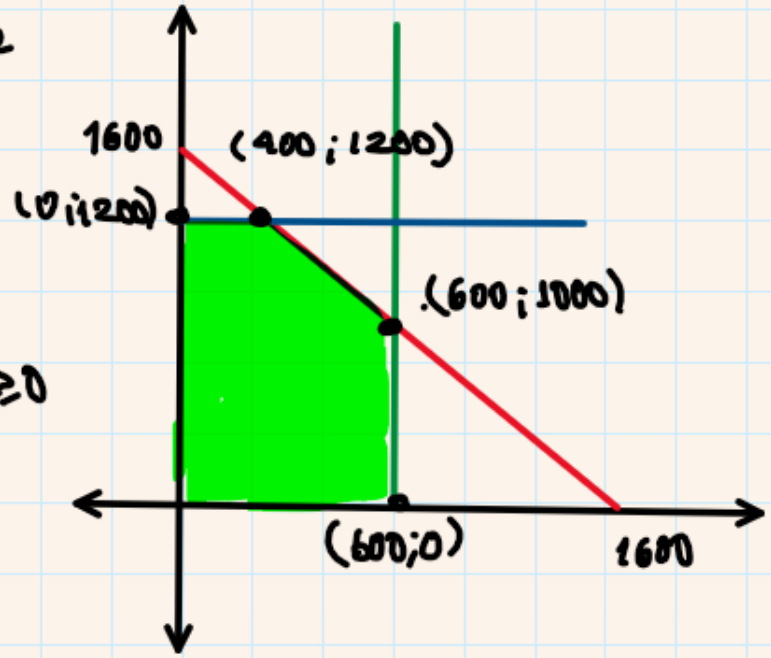
A) solo 1200 kilos de naranja
B) 600 kilos de papaya y 1000 kilos de naranja
C) solo 1600 kilos de papaya
D) 400 kilos de papaya y 1200 kilos de naranja
E) 1000 kilos de papaya y 400 kilos de naranja

SOLUCIÓN

	x Kg PAPAYA	y Kg NARANJA
Pc	S/1,3	S/1
Pv	S/1,6	S/1,2
	600	1200

$f(x;y) = 0{,}3x + 0{,}2y$

$$\begin{cases} x+y \leq 1600 \\ x \leq 600 \\ y \leq 1200 \;;\; x \geq 0;\; y \geq 0 \end{cases}$$



$f(0;1200) = S/240$

$f(400;1200) = S/360$

$f(600;1000) = S/380$ (máx)

$f(600;0) = S/180$

∴ 600 kg papaya y 1000 kg de naranja. (B)

13. Una estación de TV afronta el siguiente problema: se ha comprobado que el programa A con 20 minutos de música y 2 minutos de comerciales interesa a 30 000 televidentes, mientras que el programa B con 10 minutos de música y 1 minuto de comerciales interesa a 10 000 televidentes. El auspiciador de los programas insistió en que por lo menos se dediquen 6 minutos de propaganda por semana, mientras que la estación de TV no puede dedicar más de 80 minutos semanales para música. ¿Cuántas veces por semana deberá ser presentado cada programa a fin de lograr el mayor número de televidentes?

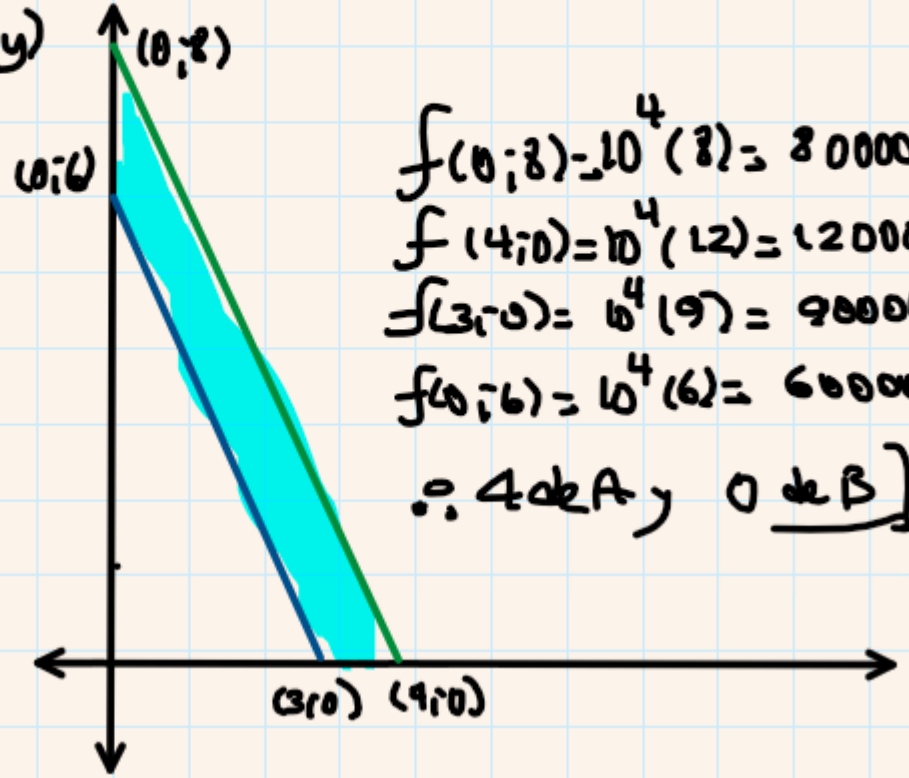
A) 3*A*; 2*B*
B) 4*A*; 0*B*
C) 2*A*; 3*B*
D) 5*A*; 1*B*
E) 5*A*, 3*B*

SOLUCIÓN

		MUSICA	COMERCIALES	TELEVIDENTES
x	A	20	2	30000
y	B	10	1	10000
		80	6	

$f(x;y) = 10^4(3x+y)$

$$\begin{cases} 2x+y \geq 6 \\ 20x+10y \leq 80 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{cases}$$



$f(0;8) = 10^4(8) = 80000$

$f(4;0) = 10^4(12) = 120000$ (máx)

$f(3;0) = 10^4(9) = 90000$

$f(0;6) = 10^4(6) = 60000$

$\therefore$ 4 de A y 0 de B] (B)

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS